Aufgabe 1 *(Basiswechsel)*
Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1, x_2, x_2)$.

(a) Welche Matrix hat f bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_2$ im $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_4$ im $\mathbb{R}^4$?

(b) Geben Sie für die Basen $\mathcal{A} = \{(1,0), (1,-1)\}$ im $\mathbb{R}^2$ sowie

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\} \text{ im } \mathbb{R}^4$$

jeweils die Transformationsmatrizen $\mathrm{id}_{\mathcal{E}_2\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{E}_4\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an.

(c) Welche Matrix hat f bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis. In c) können Sie $f_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{E}_4}\, f_{\mathcal{E}_4\mathcal{E}_2}\, \mathrm{id}_{\mathcal{E}_2\mathcal{A}}$ verwenden.

Aufgabe 2 *(Matrix eines Skalarprodukts)*
Sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung

$$g(x,y) = \langle G \cdot x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \text{mit } G = (g(e_i, e_j)) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ das Standardskalarprodukt.

Aufgabe 3 *(Gram-Schmidt Verfahren)*
Betrachten Sie auf den stetigen Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Konstruieren Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis des Unterraums der Polynome vom Grad höchstens vier.

Aufgabe 4 *(Ähnliche Matrizen)*
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnlich, das heißt es gibt $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit

$$B = C^{-1}AC.$$

Zeigen Sie $\det(B) = \det(A)$ und $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.
Hinweis. Die Spur (Englisch *trace*) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{wobei } A = (a_{ij}).$$

Es ist praktisch, erst die allgemeine Formel $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ nachzurechnen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 13.5.2013, vor der Vorlesung.